

# TOPOLOGIA

WPPT I, sem. letni

LISTA 0

## POWTÓRKA Z ANALIZY

Wrocław, 23 lutego 2010

ZADANIE 1. Podaj definicję granicy ciągu. Podaj przykład ciągu zbieżnego w sensie właściwym, w sensie niewłaściwym (tzn. do  $\infty$  lub  $-\infty$ ) i rozbieżnego. Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym. Podaj przykład ciągu ograniczonego, ale nie zbieżnego oraz ciągu nie monotonicznego ale zbieżnego. Przypomnij twierdzenie o trzech ciągach.

ZADANIE 2. Sformułuj twierdzenia o arytmetyce granic, dbając o założenia! Oblicz granice ciągów

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 - n^4}}{2n(n+3)}, \quad b_n = \sqrt{n^2 - n} - n, \quad c_n = \frac{n^3 - \sin n}{3n^3 - n^2 + n},$$
$$d_n = \frac{4n^2 - n}{2n^3 - 3n^2}, \quad e_n = \frac{-3^n}{2n^3 - 3n^2}.$$

ZADANIE 3. Co to jest ciąg podstawowy? Jaki jest związek między podstawowością a zbieżnością?

ZADANIE 4. Co to jest szereg sumowalny? Jaki jest związek między sumowalnością szeregu, a zbieżnością ciągu jego wyrazów? Podaj przykład ciągu zbieżnego do zera, ale tworzącego szereg niesumowalny. Jakie znasz kryteria sumowalności szeregu?

ZADANIE 5. Przypomnij definicje supremum i infimum zbioru, granicę dolną i górną ciągu. Jakie zachodzą nierówności między wyrażeniami:

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \quad ? \quad \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$$
$$\sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \quad ? \quad \sup_{x \in X} (f(x) + g(x))$$
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad ? \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad ? \quad \inf_{n \geq 1} a_n$$

ZADANIE 6. Przypomnij definicje Cauchy'ego i Heinego ciągłości funkcji (rzeczywistej zmiennej rzeczywistej) w punkcie oraz ciągłości funkcji w swojej dziedzinie. Zbadaj ciągłość funkcji  $y = [x]$  (część całkowita)

- w poszczególnych punktach prostej  $\mathbb{R}$
- w dziedzinie, jeśli ograniczymy ją do zbioru  $[0, 2)$

c) w dziedzinie, jeśli ograniczymy ją do zbioru  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

ZADANIE 7. Co wiadomo o funkcji ciągłej na odcinku domkniętym? Co to jest jednostajna ciągłość? Co to znaczy, że funkcja osiąga swoje wartości ekstremalne? Podaj przykład funkcji (ciągłej na dowolnie wybranej dziedzinie i dowolnej na odcinku domkniętym), która nie osiąga swoich wartości ekstremalnych.

Tomasz Downarowicz